ПРОГРАММА КУРСА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

(лектор — Ошемков А.А.)

(331, 332 группы — весенний семестр 2005 года)

1. Определение тензора. Основные тензорные операции (сложение, умножение на скаляры, тензорное произведение, свертка, перестановка индексов). Тензоры как полилинейные отображения. Размерность пространства тензоров данного типа. Тензорные поля. Базисные векторные и ковекторные поля, связанные с системой координат.

2. Операции поднятия и опускания индексов. Операции симметрирования и альтернирования. Их свойства.

3. "Стандартный" базис в пространстве кососимметрических тензоров. Изменение базисных кососимметрических тензоров и компонент кососимметрического тензора при замене базиса.

4. Дифференциальные формы. Определения внешнего умножения (координатное и инвариантное) Свойства внешнего умножения.

5. Определение внешнего дифференцирования. Свойства внешнего дифференцирования.

6. Ковариантное дифференцирование как тензорная операция в $\mathbb{R}^n$. Символы Кристоффеля в криволинейных системах координат (в $\mathbb{R}^n$). Закон их изменения при замене координат.

7. Определение аффинной связности (операции ковариантного дифференцирования) на многообразии. Ее свойства.

8. Операция ковариантного дифференцирования одного векторного поля вдоль другого. "Однозначность" определения операции ковариантного дифференцирования по ее свойствам.

9. Римановы связности. Теорема о существовании и единственности симметричной римановой связности.

10. Определение параллельного переноса на многообразии с аффинной связностью. Свойства оператора параллельного переноса. Свойства параллельного переноса относительно римановой связности.

11. Геодезические. Простейшие свойства и примеры. Экспоненциальное отображение. Геодезические сферы.

12. Лемма Гаусса. Геодезические как кратчайшие.

13. Тензор кривизны. Координатное определение. Формулы для компонент тензора кривизны через символы Кристоффеля. Критерий локальной евклидовости метрики (без док-ва). Тензор Риччи. Скалярная кривизна.

14. Коммутатор векторных полей. Определение и основные свойства. Тензор кручения и тензор кривизны как полилинейные отображения.

15. Алгебраические симметрии тензора кривизны.

16. Тензор кривизны для римановой связности. Тензор кривизны в двумерном случае. Теорема Гаусса.

17. Определение интеграла от дифференциальной формы (в одной карте). Определение многообразия с краем. Край гладкого многообразия как гладкое многообразие.

18. Определения ориентируемости многообразия. Их эквивалентность. Ориентируемость края ориентируемого многообразия. Определение интеграла от дифференциальной формы по многообразию с краем.

19. Формула Стокса.

20. Операция перенесения формы (прообраз формы). Ее свойства (перестановочность с операциями внешнего умножения и внешнего дифференцирования).

21. Группы когомологий. Числа Бетти. Гомоморфизм групп когомологий, порожденный гладким отображением.

22. Вычисление 0-мерной группы когомологий гладкого многообразия. Вычисление групп когомологий окружности.

23. Гомотопные отображения. Гомотопически эквивалентные пространства. Совпадение гомоморфизмов групп когомологий, порожденных гомотопными отображениями.

24. Равенство групп когомологий для гомотопически эквивалентных пространств. Лемма Пуанкаре.

25. Примеры вычисления одномерных групп когомологий. Критерий точности замкнутой 1-формы. Вычисление групп когомологий двумерной сферы.

26. Теорема Сарда (без док-ва). Степень отображения. Корректность определения.

27. Теорема Брауэра. Теорема о существовании нуля у векторного поля на четномерной сфере. Основная теорема алгебры.

28. Теорема об интеграле от прообраза формы. Гауссово отображение. Теорема Гаусса–Бонне.

29. Индекс изолированной особой точки векторного поля. Теорема о сумме индексов особых точек векторного поля.